Cuerpo rígido

Ejercicio 22

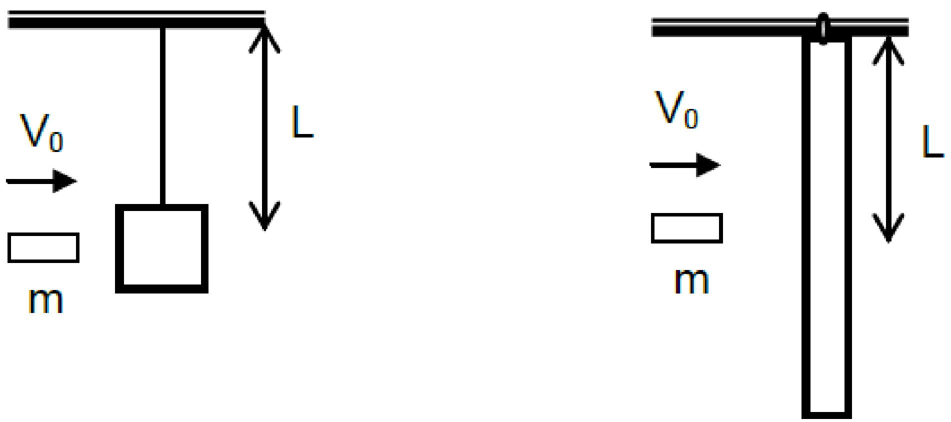
22. Sobre un péndulo ideal y sobre una barra fina maciza impactan dos proyectiles idénticos (igual masa y velocidad). Ambos péndulos tienen el mismo valor de masa. Los proyectiles impactan en la partícula y en el centro de masa de la barra respectivamente y quedan incrustados.

a) Analizar ambos sistemas un instante inmediatamente antes y un instante inmediatamente después de la colisión. ¿Se conserva la cantidad de movimiento en un eje horizontal?

b) ¿Se conserva la energía mecánica durante y después de la colisión?

c) Si la longitud del hilo del péndulo ideal es igual a la mitad de la longitud de la barra. Después del choque, ¿llegará más alto la partícula del péndulo ideal o el centro de masa de la barra?

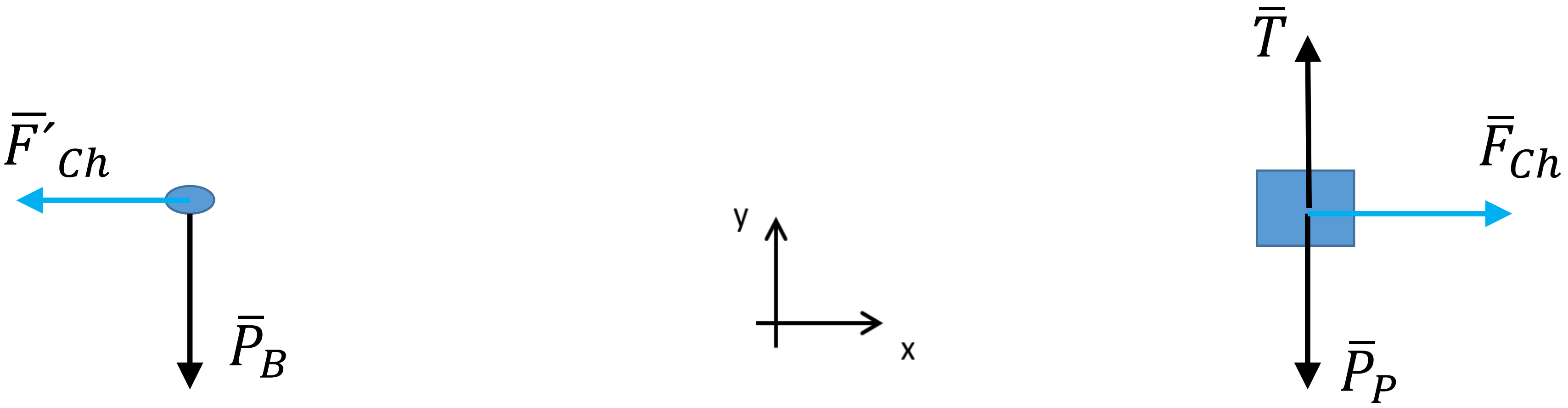
(DATO: ICM= $(M\,L^2)/12$).



a) Caso 1: Sistema bala + péndulo

- DCL durante el choque

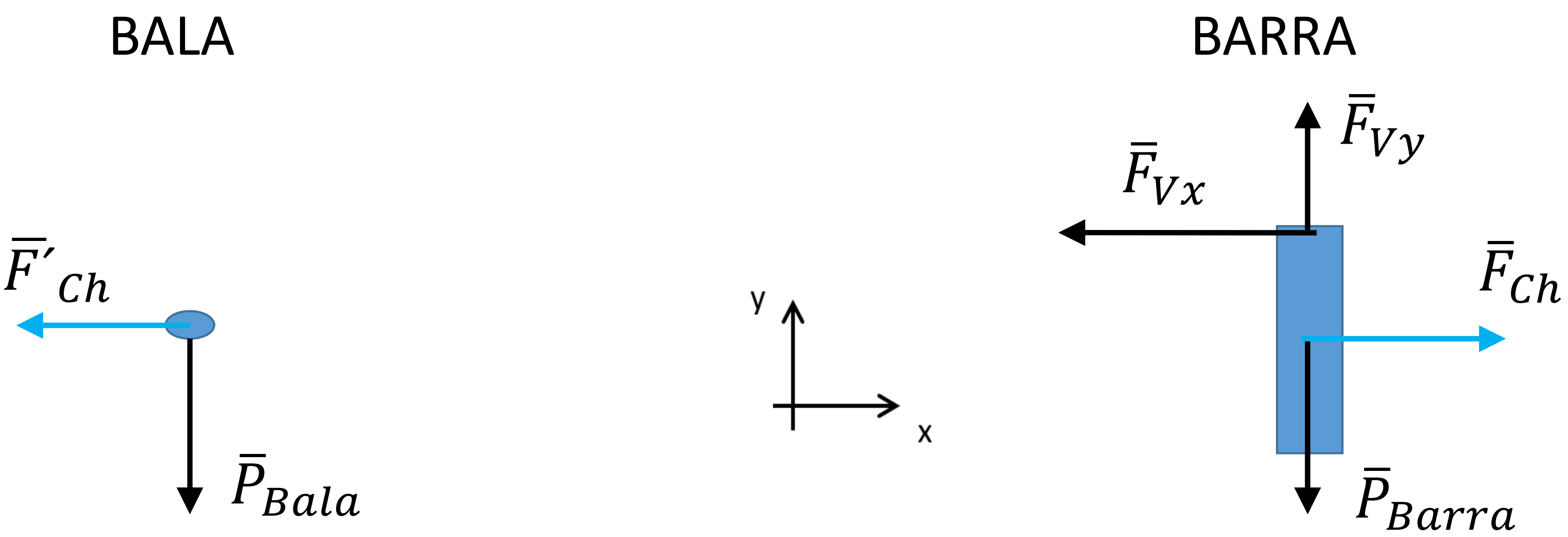
BALA PÉNDULO



- No hay fuerzas externas en el eje x entonces Px se conserva

a) Caso 2: Sistema bala + barra

- DCL durante el choque



- Hay fuerzas externas en el eje x entonces Px no se conserva

b)

- En ambos casos, durante el choque no se conserva la energía porque es plástico.

- En ambos casos, después del choque se conserva la energía mecánica porque:
  - En el caso 1 la única fuerza no conservativa es la tensión y ésta es perpendicular al desplazamiento, entonces su trabajo es cero.
  - En el caso 2 la única fuerza no conservativa es la fuerza de vínculo que está aplicada en el CIR (dr=0), entonces su trabajo es cero.

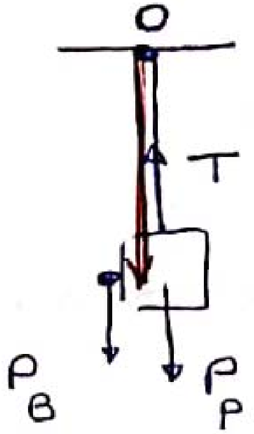
¿Se conserva la cantidad de movimiento angular?

- Respecto del eje donde está colgado, durante el choque

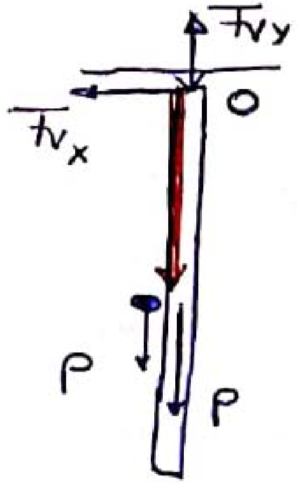
- En el caso 1, las fuerzas externas son todas verticales (pesos y tensión) el vector r es paralelo a éstas fuerzas. Entonces al suma de torques es cero, se conserva la cantidad de movimiento angular.

- En el caso 2, el r que va del eje al CM es vertical y los pesos también lo son. Entonces, como son paralelos, el torque de los pesos es cero. Y el torque de la fuerza de vínculo también es cero porque el r=0.

CASO 1



CASO 2



$$\sum \bar{\tau}_o = \underbrace{\bar{r} \times \bar{T}}_{=0 \text{ sou } //} + \underbrace{\bar{r} \times \bar{P}_B}_{=0 \text{ sou } //} + \underbrace{\bar{r} \times \bar{P}_p}_{=0 \text{ sou } //} = 0$$

$$\sum \bar{\tau}_o = \underbrace{\bar{r} \times \bar{P}_{Bala}}_{=0 \text{ sou } //} + \underbrace{\bar{r} \times \bar{P}_{Barra}}_{=0 \text{ sou } //} + \underbrace{\bar{r} \times \bar{F_v}}_{\bar{r} = 0}$$

Durante el choque se conserva el L_O (caso 2)

$$\bar{L}_O^{ACh} = \bar{L}_O^{DCh}$$

$$m(-L\breve{j}) \times v_0\breve{\imath} = m(-L\breve{j}) \times v_1\breve{\imath} + I_{CIR}\Omega\breve{k}$$

Por teorema de Steiner $I_{CIR} = I_{CM} + M(L)^2 = \frac{4}{3} \cdot M \cdot L^2$

En el choque plástico $\bar{v}_1 = \bar{v}_{CM}$

Y por condición de rigidez $\bar{v}_{CM} = \bar{v}_{CIR} + \Omega\breve{k} \times (-L\breve{j}) = \Omega \cdot L\breve{\imath}$

Durante el choque se conserva el L_O (caso 2)

$$\bar{L}_O^{ACh} = \bar{L}_O^{DCh}$$

$$m \cdot L \cdot v_0 \breve{k} = m \cdot L \cdot \Omega \cdot L \breve{k} + \frac{4 \cdot M \cdot L^2}{3} \Omega \breve{k}$$

$$\bar{\Omega} = \frac{3 \cdot m \cdot v_0}{L(3m + 4M)} \breve{k}$$

Y por condición de vínculo $\bar{v}_1 = \bar{v}_{CM} = \frac{3 \cdot m \cdot v_0}{(3m+4M)} \breve{\imath}$

Determinar la altura máxima en el caso 2

$$E_M^{Dch} = E_M^{Hmax}$$

Defino Ep=0 en el centro de masa de la barra después del choque

$$\frac{m}{2} v_1^2 + \frac{I_{CIR}}{2} \Omega^2 = (m + M) \cdot g \cdot H_{max}$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{3 \cdot m \cdot v_0}{(3m + 4M)} \right)^2 + \frac{4 \cdot M \cdot L^2}{6} \left(\frac{3 \cdot m \cdot v_0}{L(3m + 4M)} \right)^2 = (m + M) \cdot g \cdot H_{max}$$

$$H_{max} = \frac{3 \cdot (3m + 4M) \cdot m^2 \cdot v_0^2}{2 \cdot g \cdot (m + M) \cdot (3m + 4M)^2} = \frac{3 \cdot m^2 \cdot v_0^2}{2 \cdot g \cdot (m + M) \cdot (3m + 4M)}$$

Comparación de caso 1 (péndulo) y 2 (barra)

- Durante el choque

	Caso 1 (Bala + Péndulo)	Caso 2 (Bala + Barra)
¿Se conserva $\bar{P}$?	SÍ	NO
¿Se conserva $\bar{L}_O$?	SÍ	SÍ
¿Se conserva E_M ?	NO	NO
Velocidades después del choque	$\bar{v}_1 = \dfrac{m \cdot v_0}{(m+M)} \breve{\imath}$	$\bar{v}_1 = \bar{v}_{CM} = \dfrac{3 \cdot m \cdot v_0}{(3m+4M)} \breve{\imath}$ $\bar{\Omega} = \dfrac{3 \cdot m \cdot v_0}{L(3m+4M)} \breve{k}$

Comparación de caso 1 (péndulo) y 2 (barra)

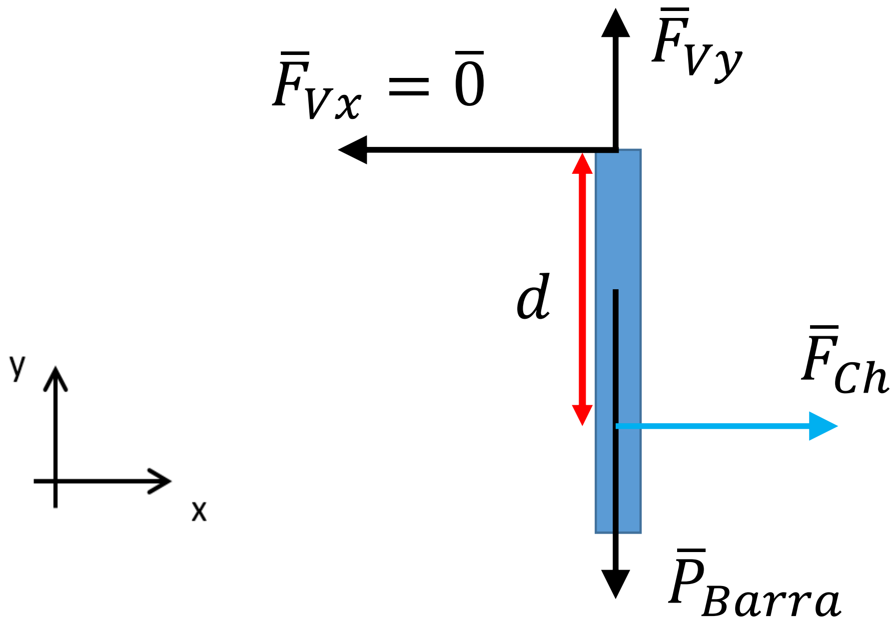
- Después del choque

	Caso 1 (Bala + Péndulo)	Caso 2 (Bala + Barra)
¿Se conserva $\bar{P}$?	NO	NO
¿Se conserva $\bar{L}_O$?	NO	NO
¿Se conserva E_M ?	SÍ	SÍ
Altura máxima	$H_{max} = \frac{m^2 \cdot v_0^2}{2g(m+M)^2}$	$H_{max} = \frac{3 \cdot m^2 \cdot v_0^2}{2 \cdot g \cdot (m+M) \cdot (3m+4M)}$

- Si comparamos las expresiones de la altura máxima, podemos afirmar que en el caso 2 la altura es menor.

EXTRA: Centro de percusión

- ¿Es posible que la bala impacte a la barra a una distancia d tal que se conserve la cantidad de movimiento en el eje x? Es decir, Fvx=0?



EXTRA: Centro de percusión

- En el centro de percusión se minimiza la fuerza de vínculo (en cuerpos suspendidos la fuerza del eje, en cuerpos que ruedan sin deslizar la fuerza de rozamiento)

$$\sum \bar{T}_O = (-d)\breve{j} \times F_{ch}\breve{i} = F_{ch} \cdot d\breve{k} = \frac{4 \cdot M \cdot L^2}{3}\gamma\breve{k}$$

$$\sum F_x = F_{ch} = M \cdot a_{CMx}$$

EXTRA: Centro de percusión

$$F_{ch} \cdot d = \frac{4 \cdot M \cdot L^2}{3}\gamma$$

Por relación de aceleraciones de un cuerpo rígido $a_{CMx} = \gamma \cdot L$

$$F_{ch} = M \cdot a_{CMx} = M \cdot \gamma \cdot L$$

Reemplazo en la suma de momentos

$$M \cdot \gamma \cdot L \cdot d = \frac{4 \cdot M \cdot L^2}{3}\gamma \qquad \rightarrow \qquad d = \frac{4L}{3}$$